INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL OF BIRUNI
ISSN (E) 2181-2993
Vol. 2, Issue 2. May. (2023)

AYNIYAT, TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASH VA IFODALARNI SODDALASHTIRISHDA HOSILADAN FOYDALANISH

DJABBAROV Odil Djurayevich
TDTU Olmaliq filiali katta o'qituvchisi
odilxon455@gmail.com
JONQOBILOV Jahongir Tirkashevich
TDTU Olmaliq filiali o'qituvchisi

https://doi.org/10.24412/2181-2993-2023-2-173-177

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada matematik masalalar: ifodalarni soddalashtirish, ayniyat va tengsizliklarni isbotlashda hosiladan foydalanib yechish usuli ko'rsatilgan. Bu usul klassik usullardan ancha qulayligi misollar yordamida ko'rib o'tilgan.

Kalit so'zlar: *Ayniyat, tengsizlik, funksiya, hosila, soddalashtirish, teorema, o'suvchi, kamayuvchi.*

ABSTRACT

This article shows the method of solving mathematical problems: simplifying expressions, using derivation in proof of identity and inequalities. This method is much easier than classical methods, and it is considered with the help of examples.

Key words: *identity, inequality, function, derivative, simplification, theorem, increasing, decreasing.*

АННОТАЦИЯ

В данной статье показан метод решения математических задач: упрощение выражений, использование вывода при доказательстве тождества и неравенств. Этот метод намного проще классических и рассматривается на примерах.

Ключевые слова: *тождество, неравенство, функция, производная, упрощение, теорема, возрастание, убывание.*

KIRISH.

Bizga $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ayniyat berilgan bo'lsin. Ma'lumki, bu ayniyatni isbotlashda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ifodani shakl almashtirishlar yordamida $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ifodani va aksincha , $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ifodani shakl almashtirishlar yordamida $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ifodani xosil qilishdan iborat. O'zining aniqlanish sohasida $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ayniyatni hosila yordamida isbotlash o'ziga xos qulayliklarga ega. Buning uchun $x_1, x_2, \dots, x_n$ harfiy o'zgaruvchilardan biror x_i ni o'zgaruvchi deb, qolganlarini o'zgarmas deb olib $\varphi(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyani tuzib, x_i bo'yicha hosila olamiz. Ayniyatni isbotlashda quyidagi teoremadan foydalanamiz.

MUHOKAMA VA NATIJALAR.

Teorema. Agar $y = \varphi(x)$ funksiya biror to'plamda $\varphi'(x) = 0$ bo'lsa, u holda shu to'plamda $\varphi(x) = C$ bo'ladi.

Misol. Ixtiyoriy $x, y \in R$ uchun $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ ekanligini isbotlang.

Isbot. $\varphi(x,y) = (x+y)^3 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$ funksiyadan x bo'yicha hosila olamiz: $\varphi'(x,y) = 3(x+y)^2 - x^3 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 = 0$. Demak , $\varphi(x,y) = C$ ekan, C ni topish uchun $x = 0$ deb olamiz va

$\varphi(0,y) = y^3 - y^3 = 0 = C$

natijaga ega bo'lamiz. Yuqoridagi teoremaga asosan: $\varphi(x,y) = 0$, ya'ni

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

ekanligi kelib chiqadi.

Hosila yordamida murakkab ayniyatlarni isbotlash shakl almashtirishlardan ko'ra o'z afzalliklariga ega va hisoblash jaroyonini tezlashtiradi.

Misol. $sin^2x + cos^2x = 1$ ayniyatni isbotlang.

Isbot. $f(x) = sin^2x + cos^2x - 1$ funksiyani tuzib, uning hosilasini topamiz: $f'(x) = 2sinx\ cosx - 2cosx\ sinx = 0$. Bundan $f(x) = C$ ekanligi kelib chiqadi. C ni topish uchun $x = 0$ deb olib, $f(0) = 0$ dan $C = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $sin^2x + cos^2x = 1$ ekan.

Bizga qandaydir algebraik ifoda berilgan bo'lsin, uni hosila yordamida soddalashtirish mumkin. Algebraik ifoda bir necha harfiy o'zgaruvchilar yoki parametrlardan iborat bo'lishi mumkin, ya'ni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'rinishda bo'ladi. Bunday ifodalarni soddalashtirish uchun ixtiyoriy x_i ni o'zgaruvchi, qolganlarini o'zgarmas deb, x_i o'zgaruvchi bo'yicha hosila olamiz. Xususiy holda $f(x;y;z)$ ifoda berilgan bo'lsa, x ni o'zgaruvchi, y va z larni o'zgarmas deb olsak, $f'_x(x;y;z)$ ni topamiz va soddalashtirishni bajaramiz.

Misol. $(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. Agar qisqa ko'paytirish formulalaridan foydalansak yoki qavslarni ochib yuborsak , ancha qiyinchiliklarga duch kelamiz. Misolni hosila yordamida hal etish uchun x ni o'zgaruvchi , y va z larni o'zgarmas deb, x bo'yicha hosila olamiz:
$f'_x(x;y;z) = 3(x+y+z)^3 - 3(x+y-z)^2 - 3(y+z-x)^2 - 3(z+x-y)^2 =$
$3[2(x+y)2z + 2(x-y)(-2z)] = 24\,yz$

.

U holda $f(x;y;z)=24xyz+C$ bo'ladi, bu yerda $C=C(y,z)$. Agar $x=0$ deb olsak, $f(0;y;z)=(y+z)^3-(y-z)^3-(y+z)^3-(z-y)^3=0$ ekanligidan $C=0$ kelib chiqadi. Demak, $f(x;y;z)=(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3=24xyz$ ekan. Xuddi shu kabi algebraik ifodalarni ko'paytuvchilarga ajratish masalasini hal qilish mumkin, lekin bu yerda har qanday algebraik ifodalarni ko'paytuvchilarga ajratish mumkin degani emas. Masalan, $f(x;y)=x^2+3y^2$ ifodani ko'paytuvchilarga ajratish iloji yo'q.

Ayrim algebraik tengsizliklarni yechishga hosiladan foydalanib yechish mumkin. Aytaylik, qandaydir $a<x<b$ oraliqda $f(x)\geq g(x)$ tengsizlikni isbotlash talab qilinsin. Ushbu $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ funksiyani kiritamiz. U holda masala $\min\limits_{a<x<b}\varphi(x)=0$ ekanligini isbotlashga teng kuchli bo'ladi. Masalaning yechimi quyidagi qadamlarda amalga oshiriladi:

1) $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ funksiya kiritiladi.
2) $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)$ hosila topiladi.
3) $\varphi'(x)=0$ tenglama ildizi x_0 topiladi.
4) Agar $\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega $\varphi(x_0)\geq 0$ bo'lsa, u holda (a,b) ga tegishli ixtiyoriy x uchun $\varphi(x)\geq 0$ bo'ladi. Bundan esa $f(x)\geq g(x)$ ekanligi kelib chiqadi. Bunda $y'(x)=0$ tenglama bitta x_0 ildizga ega va $x_0\in(a;b)$ deb faraz qilinadi.

Misol. $2022^{2023}>2023^{2022}$ ekanligini isbotlang.

Isbot. 1) $y=\frac{\ln x}{x}$ funksiyani kiritamiz. 2) $y'=\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}$ 3) $1-lnx=0; x=e$.

$x>e$ da $y'<0$ bo'ladi, demak $y=\frac{lnx}{x}$ funksiya kamayuvchi ekan. $0<x<e$ da $y'>0$ bo'ladi, demak $y=\frac{lnx}{x}$ funksiya o'suvchi ekan. U holda $x=e$ nuqtada funksiya maksimumga ega ekanligi kelib chiqadi. Bundan $\frac{\ln 2023}{2023}<\frac{\ln 2022}{2022}$ kelib chiqadi, uni shakl almashtirib, $2023^{2022}<2022^{2023}$ ni hosil qilamiz.

Misol. Quyidagi $\cos 2022<1+cos2023$ tengsizlik o'rinlimi?

Yechish. Berilgan tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz:

$\cos 2022+2022<cos2023+2023$.

U holda $f(x)=cosx+x$ funksiya uchun $f(2022)<f(2023)$ tengsizlik o'rinli, chunki $f'(x)=-sinx+1$ dan $f'(x)>0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiya o'suvchi ekanligi kelib chiqadi. Ayrim hollarda ikki ifodaning taqqoslashga to'g'ri keladi. Bunday holatda ham hosila tushunchasi muhim ahamiyatga ega bo'ladi.

Misol. Qaysi son katta? $\log_{2022} 2023$ yoki $\log_{2023} 2024$

Yechish. Quyidagi yordamchi funksiyani tuzamiz: $f(x) = \log_x(x+1)$ yoki $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{lnx}$. U holda $f'(x) > 0$ dan $\left(\frac{lnx}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}\right)$: $ln^2x > 0$,

$xlnx > (x+1)\ln(x+1)$. Ammo $x > 1$ da $0 < x < x+1, 0 < lnx < \ln(x+1)$, undan esa $xln\, x < (x+1)\ln(x+1)$ kelib chiqadi. Shuning uchun $x > 1$ da $f'(x) < 0$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $f(x)$ funksiyani kamayuvchi ekanligini, ya'ni $\log_{2022} 2023 > \log_{2023} 2024$ ekanligini ko'rsatadi. Ma'lumki, $f(x) > a$ $(f(x) < a)$ tengsizlik qandaydir to'plamda yechimga ega bo'ladi, faqat va faqat shundaki, agar $f(x)$ funksiyaning eng kichik (eng katta) qiymati berilgan to'plamda a dan katta (kichik) bo'lsa.

Misol. $x + \frac{1}{x} \geq a$ tengsizlik a ning qanday qiymatlarida yechimga ega ?

Yechish. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ funksiya uchun $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0, \ x = \pm 1$.

$x = 1$ nuqtada minimumga , $x = -1$ nuqtada esa maksimumga ega. Bizning misolda $x = 1$ nuqtada $f_{min}(1) = 2 = a$ ekanligini topamiz.

Quyidagi misollarni mustaqil yechishga tavsiya etiladi:Место для формулы.

1) 1+2x+3x^2+...+nx^{n-1} ifodani hosila yordamida soddalashtiring.
2) arcsinx + arccosx = $\frac{\pi}{2}$ ayniyatni hosila yordamida isbotlang.
3) cosx + xsinx>1, 0$< x < \frac{\pi}{2}$ da tengsizlikni hosila yordamida isbotlang.
4) $e^e\pi^\pi$ va $e^{2\pi}$ sonlarni hosila yordamida taqqoslang.
5) Ikki son o'rta arifmetigi ularning o'rta geometriyasidan katta yoki teng ekanligini hosila yordamida isbotlang.
6) $\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}}$ - $\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24+}}}$ ifodani hosila yordamida hisoblang.
7) $\frac{1}{2^2}$ +$\frac{1}{3^2}$+...+$\frac{1}{2023^2} < \frac{2022}{2023}$ tengsizlikni hosila yordamida isbotlang.
8) (1-x)(1-y)(1-z) $\geq$ 8xyz tengsizlik x, y va z larning qanday shartlarida o'rinli bo'ladi?

XULOSA.

Hosila yordamida funksiyani tekshirish masalalari keng o'rganilgan. Ammo hosila tushunchasi yordamida ayniyat va tengsizliklarni isbotlashda, ifodalarni soddalashtirishda klassik usullardan ancha farq bo'lib, uning qulayligi masalalarni yechishni osonlashtiradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. Djurayevich, D. O., & Doniyorovich, I. S. (2021). TEYLOR FORMULASI VA UNING TURLI MATEMATIK MASALALARGA QO'LLANILISHI. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *1*(3), 774-779.
2. Djurayevich, D. O., & O'G'Li, A. A. A. (2021). O'RTA ARIFMETIK VA O'RTA GEOMETRIK TUSHUNCHAGA BOG'LIQ KETMA-KETLIKLAR LIMITI. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *1*(1), 196-199.
3. Djurayevich, D. O., & Qizi, J. G. A. (2021). DARAXT HAJMINI HISOBLASHNING BIR MATEMATIK USULI HAQIDA. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *1*(1), 251-254.
4. Djurayevich, D. O., & Qizi, J. G. A. (2021). MATEMATIK O'ZGARMASLARNING TURLI KO'RINISHLARI HAQIDA. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *1*(2), 237-240.
5. Djurayevich, D. O., & Qizi, A. M. M. (2021). MATEMATIKA FANINI O'RGANISHDA QIZIQARLI MASALALARNING O'RNI HAQIDA. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *1*(2), 233-236.
6. Djabbarov, O. D. (2021). TEKISLIKDA UCHBURCHAK YUZASI HAQIDA AYRIM MULOHAZALAR. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *1*(9), 857-862.
7. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ. -Тошкент. Ўқитувчи, 1-қисм, 1989.
8. Djabbarov, O. D., & Jonqobilov, J. T. (2023). O'RTA QIYMATLARNI O'TKAZGICHLARNI KETMA-KET VA PARALLEL ULASH MASALALARDA QO'LLANILISHI. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *3*(4), 388-393.
9. Abdijalilova P.F., Djabbarov O.Dj. Elementlari o'zgaruvchili funksiya bo'lgan determinantning hosilasi. Tadqiqot.uz. №47. 135-137. 2022y.
10. Djabbarov, O. D., & Xujayev, T. X. (2022). KO'PHAD VA UNING ILDIZLARI ORASIDAGI MUNOSABAT. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *2*(2), 1010-1015.